

Lietuvos Respublikos
švietimo ir mokslo
ministerija

LIETUVOS MOKINIŲ MATEMATINIS MĄSTYMAS (PAGAL TIMSS TYRIMUS)

Pagrindiniai klausimai:

- Kas yra matematinis mąstymas?
- Kokie yra Lietuvos mokinių matematinio mąstymo pasiekimai?
- Kokia yra emocinių veiksnių įtaka mokinių matematinio mąstymo rezultatams?
- Kokie namų aplinkos veiksniai turi įtakos mokinių matematinio mąstymo rezultatams?
- Kokie mokyklos aplinkos veiksniai turi įtakos mokinių matematinio mąstymo rezultatams?

Matematika yra svarbi šalies kultūrai ir ekonomikai, moderniai visuomenei, ji pritaikoma įvairiose praktinės veiklos srityse. Matematinis ugdymas – tai procesas, apimantis matematinių faktų ir idėjų, matematinių mokėjimų ir įgūdžių sistemos suformavimą, matematinio mąstymo vystymą. Kaip teigia A. Ažubalis (2008), matematinis mąstymas yra vienas iš svarbiausių mokinių pažintinės veiklos komponentų. Mokiniai, kurių matematinis mąstymas menkai išvystytas, negali suprasti vienos ar kitos matematinės idėjos, sugeba formaliai įsiminti tik atskirus matematinius faktus. Daugumos mokinių mokyklinės matematikos pasiekimų lygis nėra aukštas, vaikai pamiršta didžiąją dalį per matematikos pamokas išmoktos medžiagos ir susiduria su sunkumais pritaikydami išminktą medžiagą naujame kontekste.

Nors visuotinai priimto matematinio mąstymo apibrėžimo nėra, apibendrinant galima teigti, kad *matematinis mąstymas – matematinė ir protinė veikla, apimanti gebėjimus logiškai ir sistemingai samprotauti, apibendrinti, pagrįsti, analizuoti, argumentuoti, daryti logines išvadas, abstrahuoti, spręsti problemas, atrasti sąryšius. Taip pat matematinis mąstymas apima matematinę intuiciją, fantaziją ir harmonijos jausmą, būtinus numatant uždavinio sprendimo ar teoremos įrodymo eigą.*

Mokinių matematinio mąstymo rezultatams įtakos turi emociniai veiksniai, t. y. mokinių emocijos, nuostatos, įsitikinimai ir vertybės, įvairūs kognityviniai, socialiniai, kultūriniai veiksniai, pavyzdžiui: tėvų išsilavinimo lygis, knygų skaičius namuose, vietovė, kurioje įsikūrusi mokykla, ir pan.

TIMSS (angl. *Trends in International Mathematics and Science Study*) tyrimas – tarptautinis matematikos ir gamtos mokslų gebėjimų tyrimas, inicijuotas Tarptautinės švietimo pasiekimų vertinimo asociacijos IEA (angl. *International Association of the Evaluation of Educational Achievement*). Tyrimas atliekamas kas 4 metus, juo aiškinamasi 4 ir 8 klases mokinių matematikos ir gamtos mokslų pasiekimai, jų kaita ir jiems įtakos turintys veiksniai.

2011 m. TIMSS tyrimo duomenys ir esminės išvados:

- Mokinių, turinčių teigiamą požiūrį į matematiką, pasitikinčių savo matematiniais gebėjimais, matematinio mąstymo rezultatai yra geresni. Mokinių matematinio mąstymo rezultatus itin veikia mokinių pasitikėjimas savo matematiniais gebėjimais, kiek menkiau – mokinių nuostata matematikos atžvilgiu ir domėjimasis matematikos pamokomis.
- Lyginant su ketvirtokais, labai krinta aštuntokų pasitikėjimas savo matematiniais gebėjimais, domėjimasis matematikos pamokomis, taip pat pakinta mokinių nuostata matematikos atžvilgiu.
- Ankstyvas mokinių matematinių gebėjimų ugdymas namuose yra reikšmingas vėlesniems matematinio mąstymo rezultatams.
- Geresni matematinio mąstymo rezultatai yra mokinių, kurių namuose yra daugiau knygų ir kurių tėvai yra įgiję aukštesnį išsilavinimą.
- Miestų mokyklose besimokančių mokinių matematinio mąstymo rezultatai aukštesni, jų socialinė ir ekonominė padėtis dažniausiai yra geresnė, jie yra labiau motyvuoti siekti aukštojo mokslo negu kaimo mokyklose besimokantys mokiniai.
- Aukščiausi matematinio mąstymo rezultatai yra mokinių, kurie per matematikos pamokas dažnai savarankiškai sprendžia sudėtingus probleminius uždavinius arba tokius uždavinius, kurių sprendimo eiga iškart nėra aiški.

MATEMATINIS MĄSTYMAS

Matematinis mąstymas labai svarbus mokantis matematikos ir apskritai gyvenime. Kaip nurodo R. Kaffemanas (2001), vieną žinomiausių šiuolaikinių mąstymo sampratų yra pateikęs J. Piaget. Jis teigė, kad mąstymas yra aktyvus procesas ir kad tik mąstydamas žmogus suvokia pasaulį. Vaikų mąstymas priklauso nuo jų protinių gebėjimų, o ne nuo to, ko jie yra išmokę. Psichinio vystymosi procesą J. Piaget vadino *adaptacija (prisitaikymu)* ir aiškino ją *asimiliacijos, akomodacijos* ir *pusiausvyros sąvokomis*. Vaikai turi susikonstravę protinę schemą, kuri leidžia jiems paaiškinti tai, ką mato (pusiausvyros būseną). Sąveikaujant su aplinka, vyksta dvejopi pokyčiai: keičiamas uždavinys ir pritaikomas turimai veiksmo schema (*asimiliacija*); keičiama pati schema ir pritaikoma naujo uždavinio ypatybėms (*akomodacija*). Nusistovi nauja *pusiausvyra* tarp *adaptacijos* ir vaiko santykio su aplinka.

D. Tall (2004) matematikos žinias skirsto į tris grupes, kurias vadiname trimis matematikos pasauliais:

- 1. Sąvokų pasaulis** – grindžiamas mus supančio pasaulio suvokimu. Stebint, mąstant, jaučiant realius objektus suvokiamos jų savybės, apie juos kalbama. Suvokiami ir tokie dalykai, kurių gamtoje šiaip jau nėra, pavyzdžiui, tobulai tiesi linija.
- 2. Simbolių pasaulis** – aritmetikoje, algebroje vartojami simboliai ir operavimas jais. Šiuo atveju matematinis supratimas iš pradžių vyksta apibendrinant veiksmus su realiais objektais (skaičiuojant, sudedant, atimant, grupuojant ir pan.), bet ne jų savybes. Palaipsniui veiksmai tampa matematinėmis operacijomis, kurios išreiškiamos simboliais ir galiausiai simboliai suvokiami kaip sąvokos. Pavyzdžiui, algebroje simbolis „+“ turi dvi reikšmes: procesas (sudėjimas) ir sąvoka (sudėtis).
- 3. Formalusis pasaulis** – aksiomos (formalieji apibrėžimai). Aksiomomis apibrėžiamos matematinės sąvokos (pavyzdžiui, grupė, laukas, vektorinė erdvė ir pan.) ir formalųjų įrodymų būdu gaunamos objektų savybės. Matematinis supratimas vyksta operuojant ne iš patirties pažįstamais objektais, bet suformuluotomis aksiomomis.

D. Tallo matematinio mąstymo samprata parodo, kaip formuojasi matematikos sąvokų ir objektų supratimas ir kaip iš mokyklinės pereinama į aukštąją matematiką. Mokyklinė matematika prasideda nuo sąvokų ir veiksmų supratimo žaidžiant su figūromis, jas grupuojant, skaičiuojant, matuojant ir pan. Šioms operacijoms tapus rutina, jos išreiškiamos simboliais, pavyzdžiui, 1 lentelė. **Matematinio mąstymo apibūdinimas**

Matematinio mąstymo tipai	Tyrimo metodai	Mąstymo ypatumai	Subjektyviosios savybės
Konkretusis mąstymas; abstraktusis mąstymas (analitinis, loginis ir erdvinis-scheminis); intuityvusis mąstymas; funkcinis mąstymas; dialektinis mąstymas; struktūrinis mąstymas; utilitarinis mąstymas; kūrybinis mąstymas	Stebėjimai ir bandymai; indukcinis metodas; dedukcinis (aksiominis) metodas; tradukcinis metodas (analogijos taikymas); modeliavimas (abstrakčių matematinių modelių taikymas)	Lankstumas; aktyvumas; tikslingumas; platumas; gilumas; kritiškumas; savikritiškumas; aiškumas, tikslumas, lakoniškumas	Noras tyrinėti; gebėjimas susikaupti, gera atmintis; atkaklumas; polinkis į kūrybą; intelektinis sąžiningumas; smalsumas; tikslumas, teisingumas; kalbos aiškumas, lakoniškumas; vaizduotės gebėjimai, fantazija; pasitenkinimas darbo procesu ir jo rezultatais

skaičiais ar aritmetiniais veiksmais, ir pereinama prie manipuliavimo simboliais. Vėliau, formuluojant formalius apibrėžimus ir naudojantis matematiniais įrodymais, įrodinėjant teoremas, pereinama į formalųjį aksiomų pasaulį.

A. Ažubalis (2008), nemaža dėmesio skyręs matematinio mąstymo sampratai tirti (1 lentelė), taip aprašo matematinio mąstymo tipus:

- Konkretusis (daiktinis) mąstymas* – mąstymas, vykstantis esant sąveikai su objektu ar objektais. Konkrečiojo mąstymo rūšys: 1) *neoperatyvusis mąstymas* – stebėjimas, juslinis supratimas, būdingas ikimokyklinio ir jaunesniojo mokyklinio amžiaus vaikams; 2) *operatyvusis mąstymas* – veiksmai su objektais.
- Abstraktusis mąstymas* – mokėjimas mintyse abstrahuoti, t. y. gebėjimas išskirti tyrinėjamo objekto esmines savybes ar požymius ir susitelkti į bendrąsias savybes ar požymius. Abstraktusis mąstymas skirstomas į analitinį, loginį ir erdvinį-scheminį.
- Intuityvusis mąstymas* vyksta šuoliais, greitais perėjimais, praleidžiant kai kurias grandis, ir yra įmanomas susipažinus su pagrindinėmis kurios nors srities žiniomis ir jų struktūra.
- Funkcinis mąstymas* – gebėjimas įprasminti bendruosius ir dalinius ryšius, matematinių objektų, jų savybių santykius ir mokėjimas jais naudotis.
- Dialektinis mąstymas* – gebėjimas nešabloniškai, įvairiapusiškai tirti objektus ar reiškinius.
- Struktūrinis mąstymas* – gebėjimas matyti bendrąsias objektų savybes ir santykius, matematinių santykių suvokimas.
- Utilitarinis mąstymas* – praktinis, taikomas mąstymas.
- Kūrybinis mąstymas* – gebėjimas pertvarkyti anksčiau priimtas idėjas, naujų idėjų, rezultatų kūrimas. Kūrybinio mąstymo veiklos rezultatas yra naujos žinios.

Matematinio mąstymo svarba pabrėžiama Lietuvos bendrosiose ugdymo programose. Matematinis mąstymas jose apibūdinamas kaip gebėjimų kompleksas (2 lentelė).

Matematinio mąstymo svarba pabrėžiama ir tarptautiniais švietimo tyrimais: Tarptautinės mokinių vertinimo programos tyrimu PISA ir Tarptautiniu matematikos ir gamtos mokslų gebėjimų tyrimu TIMSS. PISA tyrimo matematikos užduotys yra ne tokios, kokios mokiniams dažniausiai pateikiamos mokykloje, jos apima realaus pasaulio problemas. PISA tyrime penkiolikmečių mokinių matematinis mąstymas ir samprotavimas apibūdinami

2 lentelė. Matematinio mąstymo gebėjimai pagal bendrąsias programas

Pradinio ugdymo bendroji programa (2008)	Pagrindinio ugdymo bendroji programa (2008)	Vidurinio ugdymo bendroji programa (2011)
Produktyviai mąstyti įprastomis aplinkybėmis; rodyti kūrybiniam mąstymui būdingus elementus neįprastomis aplinkybėmis; apžvelgti būdingus objektų ir reiškinių bruožus, nustatyti pagrindinius ir ne tokius svarbius jų sąryšius ar dėsningumus; rodyti savarankiškumą, minčių originalumą; daryti tiksliai ir logines išvadas ar teisingu sprendimu pagrįstas išvadas.	Klasifikuoti matematinius objektus pagal nurodytą arba pasirinktą požymį; iš kelių atvejų nurodyti, kuris yra bendresnis; pasitikrinti ir ištaisyti savo darbą atsižvelgiant į išsakytas pastabas ar pagal teisingo darbo pavyzdį; iš kelių išnagrinėtų pavyzdžių padaryti išvadas, jas pagrįsti remiantis logine argumentacija; pritaikyti apibrėžimą, taisyklę ar teoremą (teiginį) konkrečiu ir (ar) bendruoju atveju.	Kelti hipotezes probleminėse situacijose ir jas tikrinti; suskaidyti analizuojamą problemą į lengviau įveikiamas, geriau išnagrinėtas dalis; nustatyti objektų bei reiškinių sąryšius ir dėsningumus; įrodyti teiginių teisingumą; daryti tiksliai logines išvadas, pagrįsti, argumentuoti, apibendrinti jas; parodyti matematinių idėjų originalumą.

kaip gebėjimai **sekti** nurodytomis instrukcijomis, **apibendrinti** remiantis informacija, **samprotauti**, daryti ir argumentuotai **pagrįsti** išvadas, **analizuoti**, **sintetinti** ir **vertinti** informaciją.

TIMSS tyrime mokinių matematinis mąstymas siejamas su „gebėjimu logiškai ir sistemingai mąstyti. Jis apima intuityvų indukcinį argumentavimą, paremtą šablonais ir taisyklėmis, kuriais galima naudotis siekiant išspręsti nerutininis uždavinius. <...> Matematinis mąstymas apima gebėjimą stebėti ir daryti spėjimus. Jis taip pat apima loginių išvadų, paremtų tam tikromis prielaidomis ir taisyklėmis, darymą ir rezultatų pagrindimą“ (NEC, 2012). Pagal TIMSS tyrimą ketvirtos ir aštuntos klasės mokinių matematinis mąstymas apima gebėjimus:

- **Analizuoti.** Apibrėžti, apibūdinti ar naudotis kintamųjų ir objektų ryšiais matematinėse situacijose. Remiantis pateikta informacija daryti pagrįstas išvadas.
- **Apibendrinti.** Taip išplėsti nagrinėjamą sritį, kad, performu-

lavus matematinio mąstymo ir užduočių sprendimo rezultatus, jie įgautų bendresnę ir plačiau taikomą prasmę.

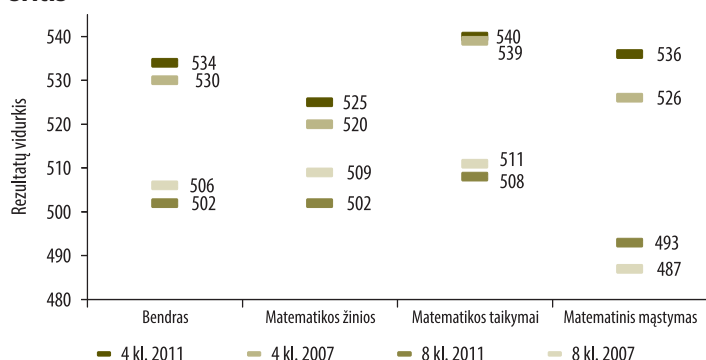
- **Integruoti.** Atrasti sąsajas tarp skirtingų žinių elementų ir susijusių atvaizdavimų. Nustatyti ryšius tarp susijusių matematinių idėjų. Derinti matematinius faktus, sąvokas ir procedūras siekiant išspręsti užduotį.
- **Pagrįsti.** Pagrįsti gautus atsakymus remiantis matematiniais rezultatais ar matematinėmis savybėmis.
- **Spręsti nerutininis uždavinius.** Spręsti kitokius uždavinius, nei mokiniai pratę spręsti klasėje. Uždaviniai gali būti pateikti matematiniame ar kasdieniame kontekste. Taikyti matematinius faktus, sąvokas ir procedūras nepažįstamuose ar sudėtinguose kontekstuose (NEC, 2012).

Apibendrinant galima teigti, kad matematinis mąstymas – protinė matematinė veikla, apimanti gebėjimus logiškai ir sistemingai samprotauti, apibendrinti, pagrįsti, analizuoti, argumentuoti, daryti logines išvadas, abstrahuoti, spręsti problemas, atrasti sąryšius.

LIETUVOS MOKINIŲ MATEMATINIO MĄSTYMO PASIEKIMAI

Analizuojant Lietuvos mokinių 2011 m. TIMSS tyrimo matematikos rezultatus (bendrus vidurkius ir pagal gebėjimų sritis) matyti, kad geriausi buvo ketvirtokų ir aštuntokų matematikos taikymo gebėjimai (1 pav.). Ir 2007 m., ir 2011 m. menkiausias buvo ketvirtokų matematinės žinios, o aštuntokų – matematinio mąstymo gebėjimai. 2011 m. ketvirtokų matematinio mąstymo rezultatų vidurkis, palyginti su 2007 m. rezultatais, statistiškai reikšmingai pakilo (10 skalės taškų) ir atitiko bendrą matematikos rezultatų vidurkį. 2011 m. aštuntokų matematinio mąstymo rezultatų vidurkis, palyginti su 2007 m., pakilo, tačiau buvo daug žemesnis negu bendras matematikos rezultatų vidurkis. Tiek

1 pav. Matematikos rezultatai, bendri ir pagal gebėjimų sritis

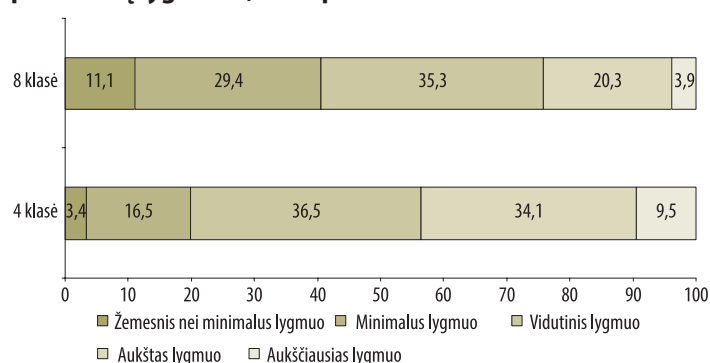


Duomenų šaltinis: TIMSS 2007, 2011 duomenų bazės

ketvirtokų, tiek aštuntokų mergaičių ir berniukų matematinio mąstymo rezultatų vidurkiai statistiškai reikšmingai nesiskyrė.

2011 m. aukščiausių matematinio mąstymo pasiekimų lygmenį pasiekė 9,5 proc. ketvirtos klasės ir tik 3,9 proc. aštuntos klasės mokinių. Vidutinio lygmens nepasiekė 19,9 proc. ketvirtokų ir dvigubai daugiau, net 40,5 proc., aštuntokų. 43,6 proc. ketvirtokų pasiekė aukštą matematinio mąstymo pasiekimų lygmenį. Aštuntokų dalis buvo kur kas mažesnė, tik 24,2 proc. jų pasiekė aukštą pasiekimų lygmenį. Minimalaus matematinio mąstymo pasiekimų lygmens nepasiekė 3,4 proc. ketvirtokų ir net 11,1 proc. aštuntokų (2 pav.).

2 pav. Mokinių pasiskirstymas pagal matematinio mąstymo pasiekimų lygmenis, dalis proc.



Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

EMOCINIAI VEIKSNIAI MOKANTIS MATEMATIKOS

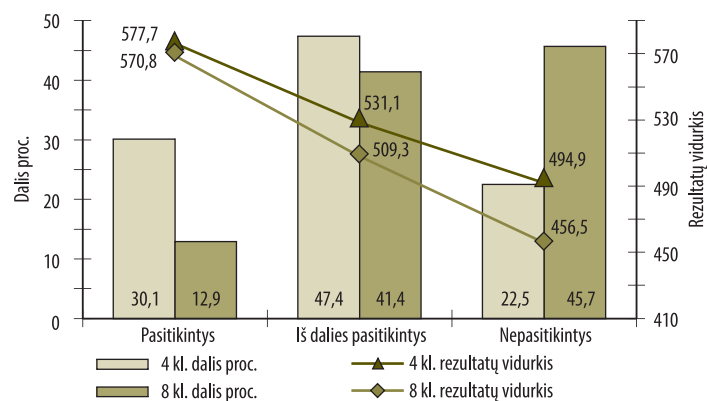
Matematinį mąstymą lemia ne tik kognityviniai, bet ir įvairūs emociniai, socialiniai, kultūriniai veiksniai. Emociniai veiksniai, turintys įtakos matematikos mokymuisi, tyrinėjami dviem kryptimis: apskritai emocijų įtaka matematiniam mąstymui, ypač uždavinių sprendimui; jų įtaka mokymui ir klasės socialiniam kontekstui (M. Hannula, J. Evans, G. Philippou, R. Zan, 2004). Tyrinédamas emocinių veiksnių įtaką mokinių matematiniam mąstymui D. B. McLeod (1992) išskyrė tris komponentus: **emocijos**, **įsitikinimai (nuomonės)** ir **nuostatos**, vėliau V. A. DeBellis ir G. A. Goldin pridėjo ketvirtą komponentą: **vertybės**. Mokiniai turi tam tikrą *nuomonę* apie matematiką, save, matematikos mokymą(si) ir socialinį mokymosi kontekstą, ir ši nuomonė labai svarbi reaguojant į matematines situacijas. Mokydamiesi matematikos mokiniai patiria teigiamų, arba, susidūrę su trukdžiais ir kliūtimis, neigiamų *emocijų*. Nuolat susidurdami su ta pačia ar panašia matematine situacija jie susikuria teigiamą arba neigiamą *nuostatą* matematikos ar atskirų jos mokymo programos dalių atžvilgiu. Pasak D. B. McLeod (1992), emocijos yra nestabiliausios, intensyviausios ir gali pasireikšti ir išnykti labai greitai, nuostatos yra pastovesnės, o nuomonė, požiūris yra stabiliausias, neintensyviausias ir plėtojamas ilgą laiką darinys. Deja, visuomenėje susiformavęs požiūris į matematiką kaip į sausą, sunkų su gyvenimu nesusijusį mokslą. M. S. Hannula (2004) praplečia D. B. McLeod teoriją ir emocinius veiksnius apibrėžia per savireguliaciją; jis teigia, kad emocija, supratimas ir motyvacija yra matematikos mokymo(si) centre, o įsitikinimai, vertybės ir nuostatos yra motyvacijos, emocijų ir supratimo procesų junginys.

Mokinių pasitikėjimas savo matematiniais gebėjimais.

2011 m. TIMSS tyrimo duomenimis, ketvirtokų ir aštuntokų matematinio mąstymo rezultatai stipriai koreliuoja (koreliacijos koeficientas atitinkamai 0,41 ir 0,5) su mokinių pasitikėjimu savo matematiniais gebėjimais. Mokiniai buvo suskirstyti į tris grupes pagal jų atsakymus į teiginius apie pasitikėjimą savo matematiniais gebėjimais, tokius kaip: *paprastai man gerai sekasi matematika, per matematikos pamokas viską išmokstu greitai, mokytojas sako, kad esu gabus matematikai* ir kt. Ketvirtų klasių mokinių pasitikėjimas savo matematiniais gebėjimais yra gana didelis,

tačiau vėliau mažėja. Savo matematiniais gebėjimais pasitiki 30,1 proc. ketvirtokų ir tik 12,9 proc. aštuntokų, net 22,5 proc. ketvirtokų ir 45,7 proc. aštuntokų – nepasitiki (3 pav.). Pasitikinčiųjų ir nepasitikinčiųjų savo matematiniais gebėjimais mokinių matematinio mąstymo rezultatų skirtumas yra didžiulis: ketvirtokų – 82,8, aštuntokų – 114,3 skalės taškų.

3 pav. Matematinio mąstymo rezultatai pagal mokinių pasitikėjimą savo matematiniais gebėjimais

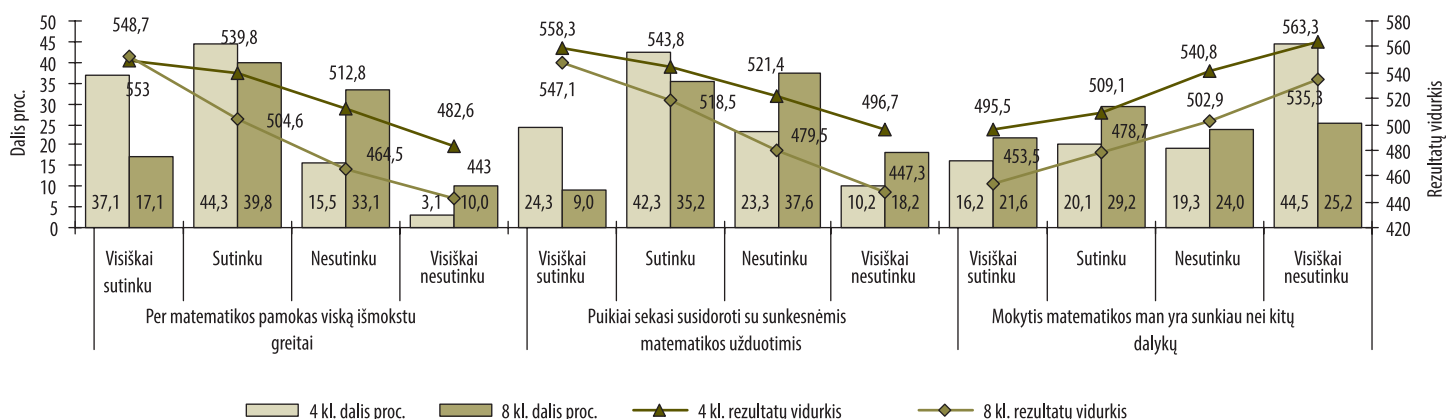


Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

Analizuojant mokinių teiginius apie pasitikėjimą savo matematiniais gebėjimais matyti, kad ketvirtos ir aštuntos klasių mokinių, kurie visiškai sutinka su teiginiu, kad per matematikos pamokas viską greitai išmoksta, matematinio mąstymo rezultatai atitinkamai 66,1 ir 110 skalės taškų aukštesni už mokinių, kurie visiškai nesutinka su šiuo teiginiu. Panašus yra ketvirtos ir aštuntos klasių mokinių, kurie visiškai sutinka su teiginiu, kad jie gerai išsprendžia sudėtingus matematikos uždavinius, ir mokinių, kurie visiškai nesutinka su šiuo teiginiu, matematinio mąstymo rezultatų skirtumas (atitinkamai 61,6 ir 99,8 skalės taškų) (4 pav.).

Mokinių matematikos vertinimas. Devyni iš dešimties (87,6 proc.) Lietuvos aštuntokų vertina matematiką ir mano, kad matematika bus naudinga tolesniame kasdieniame gyvenime (3 lentelė). Aštuntokų, atsakiusių, kad vertina matematiką, matematinio mąstymo rezultatų vidurkis didesnis už nevertinančiųjų

4 pav. Matematinio mąstymo rezultatai pagal mokinių pasitikėjimą savo matematiniais gebėjimais



Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

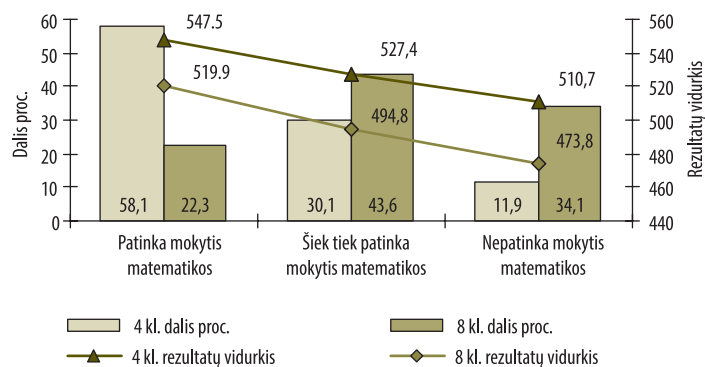
matematikos aštuntokų rezultatų vidurkį 36 skalės taškais. Taip pat net 87,3 proc. aštuntokų sutinka su teiginiu, kad norėdami įstoti į pasirinktą universitetą jie turi gerai mokytis matematiką.

3 lentelė. Aštuntokų matematikos vertinimas ir matematinio mąstymo rezultatai

	Dalis proc.	Rezultatų vidurkis
Vertinu	46,4	503,4
Šiek tiek vertinu	41,2	489,7
Nevertinu	12,3	467,4

Mokinių nuostata matematikos atžvilgiu. Dažnai mokiniams tenka mintinai mokytis nesuprantamų matematinių procedūrų ir tai sukelia antipatiją matematikai. Mokinių buvo klausta, ar jiems patinka mokytis matematikos, ar jie norėtų, kad nereikėtų mokytis matematikos, ar matematika yra nuobodi, ir pan. Daugiau nei pusė (58,1 proc.) ketvirtokų nurodė, kad mokytis matematikos patinka, ir tik kiek daugiau nei dešimtadalis (11,9 proc.) – kad nepatinka (5 pav.).

5 pav. Matematinio mąstymo rezultatai pagal mokinių nuostatą matematikos atžvilgiu



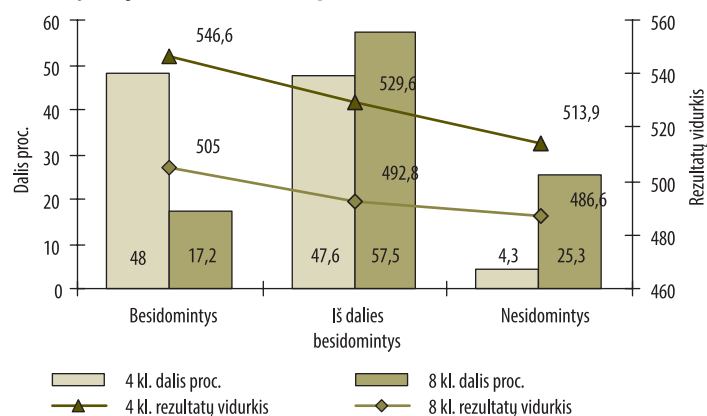
Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

Analizuojant aštuntokų nuostatą matematikos atžvilgiu matyti kiek kitokia tendencija: tik mažiau nei ketvirtadaliui (22,3 proc.) aštuntokų patinka mokytis matematikos ir net trečdaliui (34,1 proc.) – nepatinka. Taigi aštuntoje klasėje mokinių, kuriems patinka mokytis matematikos, sumažėja daugiau negu perpus, o

mokinių, kuriems nepatinka mokytis matematikos, padaugėja tris kartus. Šių grupių matematinio mąstymo rezultatų vidurkių skirtumas ketvirtokų atveju yra 36,8, o aštuntokų – 46,1 skalės taško. Taigi kuo mokiniams labiau patinka mokytis matematikos, tuo aukštesni jų matematinio mąstymo rezultatai.

Mokinių domėjimasis matematikos pamokomis. Ketvirtų ir aštuntų klasių mokinių teirautasi apie jų įsitraukimą į matematikos pamokas. Buvo prašoma atsakyti, ar mokiniai sutinka, ar nesutinka su teiginiais: *žinau, ko mokytojas iš manęs tikisi; galvoju apie dalykus, nesusijusius su pamoka; mano mokytoją lengva suprasti; man įdomu, ką kalba mokytojas; mokytojas man duoda įdomių užduočių*. Analizuojant mokinių matematinio mąstymo rezultatų ir mokinių domėjimosi matematikos pamokomis sąsąjas matyti, kad kuo labiau mokiniai domisi matematikos pamokomis, tuo geresni jų matematinio mąstymo rezultatai (6 pav.).

6 pav. Matematinio mąstymo rezultatai pagal mokinių domėjimąsi matematikos pamokomis



Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

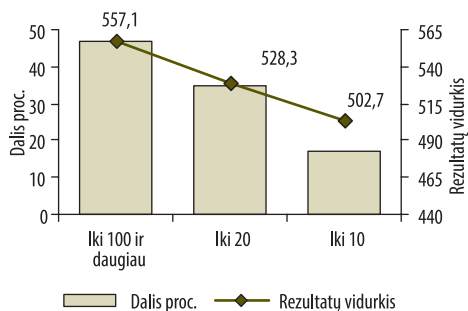
Besidominiųjų matematikos pamokomis ir nesidominiųjų jomis matematinio mąstymo rezultatų vidurkių skirtumas ketvirtokų atveju siekia 32,7, aštuntokų – 18,4 skalės taško. Kad domisi matematikos pamokomis, teigia 48 proc. ketvirtokų ir tik 17,2 proc. aštuntokų, o 25,3 proc. aštuntokų teigia, kad jomis nesidomi. 93,1 proc. aštuntos klasės matematikos mokytojų teigia, kad daugumoje pamokų skatina mokinius domėtis matematika.

ANKSTYVOJI MATEMATINĖ PATIRTIS

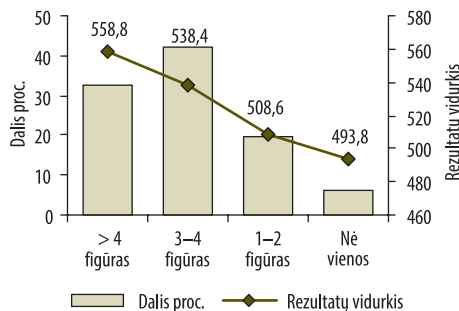
Įvairūs tyrimai atskleidžia, kad priešmokykliniame amžiuje vaikų raštingumo ir skaičiavimo įgūdžių lavinimas turi teigiamos įtakos sėkmingam vaikų mokymuisi mokykloje ir matematinių įgūdžių įgijimui (I. V. S. Mullis, M. O. Martin, P. Foy, A. Arora, 2012). Vaikai žaisdami nuolatos sprendžia matematinius uždavinius. Netgi maži vaikai gali spręsti uždavinį, jeigu jis juos sudomino, yra jiems iššūkis. Jau 4 ar 5 metų vaikas, paklaustas, kaip gavo uždavinio sprendimą, atsakydamas geba samprotauti. Šešerių metų vaikas jau gali skaičiuoti iki 100, taip pat nuo tam tikro skaičiaus pirmyn ir atgal. Tyrimai atskleidė, kad matematikos pasiekimų skirtumai, buvę tarp mokinių pradėjus lankyti mokyklą, kurį laiką yra pastovūs, o aukštesnėse klasėse ima didėti, t. y. didėja atotrūkis tarp aukščiausių ir žemiausių rezultatų pasiekiančių mokinių.

Tyrimo dalyvavusių ketvirtų klasių mokinių tėvų buvo prašoma pateikti informaciją apie jų vaikų ankstyvąją matematinę patirtį: *savarankiškai skaičiuoti, atpažinti įvairias figūras, atpažinti parašytus skaičius, parašyti skaičius nuo 1 iki 10, atlikti paprastus sudėties, atimties veiksmus*. Duomenų analizė atskleidė stiprią teigiamą priklausomybę (koreliacijos koeficientas 0,33) tarp ankstyvosios matematinės patirties ir ketvirtokų matematinio mąstymo rezultatų. 96,1 proc. tirtų ketvirtokų, pradėję lankyti mokyklą, gana gerai gebėjo atlikti šešias skaičiavimo užduotis (4 lentelė). Mokinių, kurie pradėję lankyti mokyklą skaičiavimo užduotis gebėjo atlikti labai gerai, ketvirtoje klasėje matematinio mąstymo rezultatų vidurkis buvo aukščiausias (568,6 taško). Tik 3,9 proc. mokinių, pradėję lankyti mokyklą, skaičiavimo užduotis gebėjo atlikti labai gerai, ir šių mokinių matematinio mąstymo rezultatų vidurkis

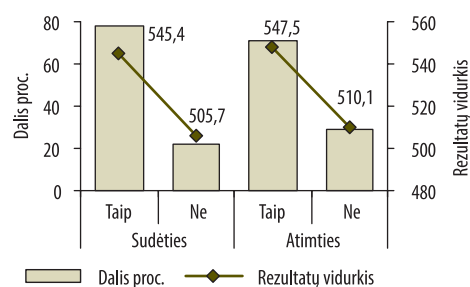
7 pav. Vaikų gebėjimas savarankiškai skaičiuoti (pradėjus lankyti mokyklą)



8 pav. Vaikų gebėjimas atpažinti įvairias figūras (pradėjus lankyti mokyklą)



9 pav. Vaikų gebėjimas atlikti paprastus aritmetinius veiksmus (pradėjus lankyti mokyklą)



Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

ketvirtoje klasėje buvo 94,9 skalės taško žemesnis negu mokinių, kurie ankstyvasias skaičiavimo užduotis gebėjo atlikti labai gerai.

4 lentelė. Ketvirtos klasės mokinių matematinio mąstymo rezultatai pagal ankstyvąją matematinę patirtį

Ankstyvoji matematinė patirtis	Dalis proc.	Rezultatų vidurkis
Labai gera	19,7	568,5
Gana gera	76,4	531,5
Nelabai gera	3,9	473,6

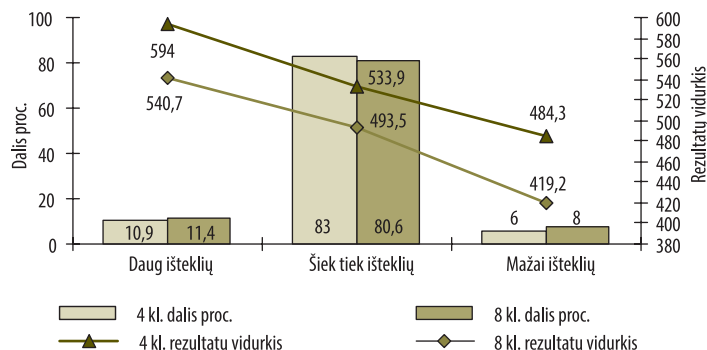
Beveik pusė vaikų (46,6 proc.), pradėję lankyti mokyklą, gebėjo savarankiškai skaičiuoti iki 100 ir daugiau (7 pav.) ir 74,6 proc. vaikų gebėjo atpažinti 3 ir daugiau įvairių figūrų (8 pav.). Vaikų, kurie, pradėję lankyti mokyklą, gebėjo atlikti paprastus sudėties ar atimties veiksmus, matematinio mąstymo rezultatų vidurkis ketvirtoje klasėje buvo iki 40 skalės taškų aukštesnis negu vaikų, kurie to negebėjo atlikti (9 pav.). Taigi ankstyvas vaikų matematinio gebėjimų vystymas namuose yra reikšmingas matematinio mąstymo gebėjimų ugdymui vėlesniame amžiuje.

NAMŲ EDUKACINIŲ IŠTEKLIŲ KIEKIS

Kaip minėta, socialiniai ir ekonominiai veiksniai turi įtakos mokinių matematiniam mąstymui, tai pažymima ir TIMSS tyrimų ataskaitose. Mokinių tėvų buvo prašoma pateikti informaciją apie tris namų edukacinius išteklius: *tėvų išsilavinimą, knygų skaičių namuose ir pagalbinus mokymosi elementus namuose (interneto ryšį ir asmeninį kambarį)*, papildomai ketvirtą klasių mokinių tėvų buvo klausiama apie *tėvų profesiją ir vaikiškų knygų skaičių namuose*. Dauguma ketvirtokų (83 proc.) ir aštuntokų (80,6 proc.) teigė namuose turintys šiek tiek edukacinių išteklių (10 pav.).

Ketvirtokų ir aštuntokų, teigiančių, kad namuose turi daug ir mažai edukacinių išteklių, matematinio mąstymo rezultatų vidurkių skirtumas yra didžiulis: 109,7 ir 121,5 skalės taško. Duomenų analizė parodė stiprų teigiamą ryšį tarp matematinio mąstymo rezultatų ir edukacinių namų išteklių kiekio (ir ketvirtokų, ir aštuntokų atveju koreliacijos koeficientas 0,4), t. y. kuo mokinių namuose knygų skaičius didesnis, tėvų išsilavinimo lygis aukštesnis, tuo matematinio mąstymo rezultatai yra aukštesni. Aukštesnis tėvų išsilavinimas leidžia jiems siekti geriau mokamo

10 pav. Lietuvos mokinių matematinio mąstymo rezultatai pagal namų edukacinių išteklių kiekį



Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

darbo, užimti geresnę socialinę ir ekonominę padėtį visuomenėje (NEC, 2012). Aukštesnį išsilavinimą įgiję tėvai labiau skatina savo vaikus siekti išsilavinimo, taip pat jų lūkesčiai didesni, t. y. 55,3 proc. tėvų tikisi, kad jų vaikai įgis aukštąjį universitetinį išsilavinimą.

MOKYKLOS VIETOVĖ IR MATEMATINIO MĄSTYMO REZULTATAI

Mokinių, besimokančių miesto (daugiau nei 100 000 gyventojų) mokyklose, matematinio mąstymo rezultatai yra aukštesni negu mokinių, besimokančių miestelių ar kaimo (iki 100 000 gyventojų) mokyklose. Šis skirtumas ketvirtokų atveju yra 35,1 skalės taško, aštuntokų – 41,9 skalės taško. Viena iš galimų šių skirtumų priežasčių yra tai, kad dideliuose miestuose yra geresnės įsidarbinimo galimybės aukštesnės kvalifikacijos ir išsilavinimo asmenims, todėl miesto mokyklose besimokančių mokinių socialinė ir ekonominė padėtis dažniausiai yra geresnė negu mokinių, besimokan-

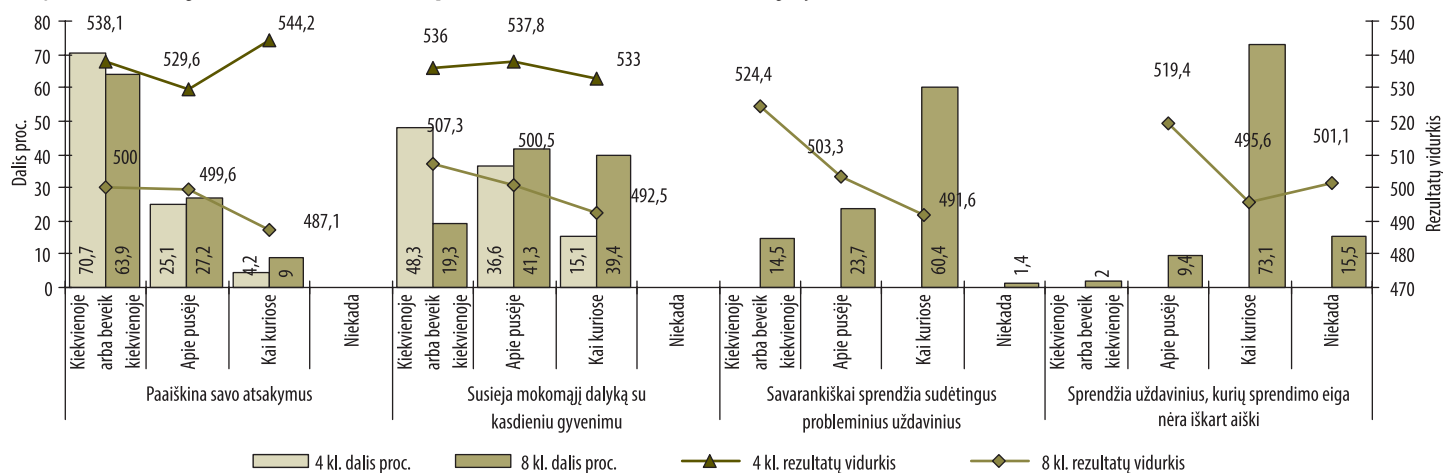
čių miestelių ar kaimo mokyklose. Patys mokiniai, besimokantys kaimo vietovėse ar mažuose miesteliuose, yra mažiau motyvuoti siekti aukštesnio išsilavinimo, t. y. 47,4 proc. mokinių, besimokančių miestų mokyklose, teigė sieksiantys aukštojo universitetinio išsilavinimo, 25,6 proc. – aukštojo neuniversitetinio arba aukštesniojo išsilavinimo, o miestelių ar kaimų mokyklose (iki 100 000 gyventojų) besimokančių mokinių ketinimai kitokie: 35,2 proc. teigė sieksiantys aukštojo neuniversitetinio arba aukštesniojo išsilavinimo ir 30,6 proc. – aukštojo universitetinio išsilavinimo.

MOKINIŲ VEIKLA MATEMATIKOS PAMOKOJE

Matematinis mąstymas lavinamas atliekant tam tikras užduotis, skatinančias mąstyti, argumentuoti, pagrįsti atsakymą ir kt. Norint sklandžiai išspręsti uždavinį neužtenka tik įsiminti pagrindinius faktus ir juos pritaikyti, tik įsiminimas nesuprantant to, kas įsiminta, nelavina mokinių. Sprendžiant analogiškas užduotis sąvokinis supratimas nereikalingas. Mokinys sprenddamas uždavinius gali remtis atmintimi, taikyti gerai išmoktas procedūras (mėgdžiojamasis samprotavimas) arba argumentuoti, pagrįsti, ieškoti matematinio pagrindimo (kūrybinis matematiškai pagrįstas samprotavimas) (S. Breen, A. O'Shea, 2011). Tokia veikla, kaip nerutininių uždavinių sprendimas, padeda kurti matematinius konstruktus, o šių konstruktyvų plėtojimas, tyrinėjimas ir tobulinimas kitose probleminėse situacijose veda į apibendrintą sistemą ar modelį, kuris gali būti naudojamas įvairiuose kontekstuose (L. D. English, H. M. Doerr, 2004).

TIMSS tyrimo duomenimis, dauguma ketvirtokų ir aštuntokų teigia, kad kiekvienoje arba beveik kiekvienoje matematikos pamokoje yra prašomi paaiškinti savo atsakymus (11 pav.). Ketvirtokų matematinio mąstymo rezultatų vidurkiai reikšmingai nesiskiria pagal tai, kaip dažnai matematikos pamokoje mokytojas prašo jų susieti mokomąjį dalyką su realiu gyvenimu. O kuo dažniau aštuntokų prašoma susieti mokomąjį dalyką su kasdiniu gyvenimu, tuo jų matematinio mąstymo rezultatai aukštesni. Aštuntokų, dažniau spendžiančių sudėtingus matematikos uždavinius ar uždavinius, kurių sprendimo eiga iškart nėra aiški, matematinio mąstymo rezultatai taip pat aukštesni. Be to, kaip teigia dauguma aštuntokų mokytojų, tokią veiklą jie taiko tik kai kuriose matematikos pamokose (atitinkamai 60,4 ir 73,1 proc.). Galima manyti, kad tik gabūs mokiniai dažnai pamokoje savarankiškai spendžia sudėtingus probleminius uždavinius.

11 pav. Mokinių veikla matematikos pamokose ir matematinio mąstymo rezultatai



Duomenų šaltinis: TIMSS 2011 duomenų bazė

APIBENDRINIMAS

„Matematinio mąstymo gebėjimas įgalina spręsti visiškai naujas problemas (praktines, realaus gyvenimo ar kitų mokslų problemas), kurioms nėra žinoma sprendimo metodų. Kai kuriais atvejais tokių problemų sprendimui netinka jau žinomos procedūros. Toks matematinio mąstymo gebėjimas nėra ugdomas vidurinėje mokykloje. Nors mūsų bendrojoje programoje teigiama, kad toks gebėjimas yra ugdomas. <...> Mūsų bendrasis ugdymas matematinio mąstymo gebėjimą sieja su gebėjimu taikyti procedūras ir algoritmus sprendžiant tipiškus uždavinius“ (Norvaiša, 2013-08).

Lietuvos 4 ir 8 klasių mokinių matematinio mąstymo rezultatų analizė, atlikta pagal 2011 m. TIMSS tyrimo duomenis, atskleidžia, kad:

- Mokiniai, kurie turi teigiamą požiūrį į matematiką ir pasitiki savo matematiniais gebėjimais, pasiekia geresnius matematinio mąstymo rezultatus. Tačiau Lietuvoje nėra nacionalinės strategijos ar iniciatyvos didinti mokinių motyvą mokytis matematikos (Eurydice, 2011).
- Lyginant ketvirtokus ir aštuntokus matyti, kad aukštesnėse klasėse labai krinta mokinių pasitikėjimas savo matematiniais gebėjimais, domėjimasis matematikos pamokomis. Taip pat

labai pakinta mokinių nuostata matematikos atžvilgiu.

- Ankstyvas mokinių matematinio gebėjimų vystymas namuose yra reikšmingas vėlesniems jų matematinio mąstymo rezultatams.
- Didelę įtaką mokinių matematinio mąstymo rezultatams turi namų edukacinių išteklių kiekis. Mokinių iš socialiai ir ekonomiškai palankesnės aplinkos, t. y. mokinių, kurių namuose yra daugiau knygų, kurių tėvai yra įgiję aukštesnį išsilavinimą ir pan., matematinio mąstymo rezultatai yra geresni.
- Mokyklos vietovė taip pat turi įtakos mokinių matematinio mąstymo rezultatams. Miestų mokyklose besimokančių mokinių matematinio mąstymo rezultatai aukštesni, jie yra labiau motyvuoti siekti aukštojo mokslo negu kaimo mokyklose besimokantys mokiniai.
- Aukštesni matematinio mąstymo rezultatai yra mokinių, dažnai (daugiau nei pusėje matematikos pamokų) savarankiškai spendžiančių sudėtingus probleminius uždavinius arba uždavinius, kurių sprendimo eiga iškart nėra aiški. Tačiau tokių mokinių dalis yra nedidelė, todėl galima manyti, kad tik gabūs mokiniai per matematikos pamokas dažnai atlieka šią veiklą.

LITERATŪRA

- Ažubalis A. *Logika ir mokyklinė matematika*. Monografija. 2008. www.lka.lt/EasyAdmin/sys/files/Logika_internetui_1.pdf.
- Breen S., O'Shea A. *The use of mathematical tasks to develop mathematical thinking skills in undergraduate calculus courses – a pilot study*. 2011. www.bsrlm.org.uk/IPs/ip31-1/BSRLM-IP-31-1-08.pdf.
- Copley J. *Mathematical Thinking: Background and Criteria*. 2013. images.pearsonclinical.com/images/Assets/WSS_5/Research_Summary_Mathematical_Thinking_FNL.pdf.
- English L. D., Doerr H. M. *Learning Through Interacting with Students' Ways of Thinking*. 2004. www.merga.net.au/documents/RP242004.pdf.
- Eurydice. *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. 2011.
- Hannula M. S. *Affect in mathematical thinking and learning*. 2004. http://www.academia.edu/200462/AFFECT_IN_MATHEMATICAL_THINKING_AND_LEARNING.
- Hannula M., Evans J., Philippou G., Zan R. *RF01: Affect in Mathematics Education – Exploring Theoretical Frameworks*. 2004. www.emis.de/proceedings/PME28/RF/RF001.pdf.
- Kaffemanas R. *Mąstymo psichologija*. Šiauliai: Šiaulių universiteto leidykla, 2001.
- Matematikos brandos egzamino programa. Patvirtinta Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministro 2011 m. liepos 1 d. įsak. Nr. V-1197.
- Matematikos pagrindinio ugdymo pasiekimų patikrinimo programa. Patvirtinta Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministro 2012 m. gegužės 9 d. įsak. Nr. V-769 redakcija.
- McLeod D. B. *Research on affect in mathematics education: a re-conceptualization*. 1992. www.peteriljedahl.com/wp-content/uploads/Affect-McLeod.pdf.
- Mullis I. V. S., Martin M. O., Foy P., Arora A. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. 2012. www.timss.org/.
- NEC. *Tarptautinis matematikos ir gamtos mokslų tyrimas TIMSS 2011*. Ataskaita. Matematika. 8 klasė. Vilnius: Grafija, 2012.
- NEC. *Tarptautinis matematikos ir gamtos mokslų tyrimas TIMSS 2011*. Ataskaita. 4 klasė. Vilnius: Grafija, 2012.
- Norvaiša R. *Kas yra matematinis mąstymas?* 2013-03. norvaisa.lt/matematika/kas-yra-matematika/kas-yra-matematinis-mastytas/.
- Norvaiša R. *Keithas Devlinas kartoja internetinį kursą: įvadas į matematinį mąstymą*. 2013-08. norvaisa.lt/matematika/mokykline-matematika/keithas-devlinas-kartoja-internetini-kursa-ivadas-i-matematini-mastyma/.
- Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosios programos: Matematika*. 2008. portalas.emokykla.lt/.
- Stacey K. *What is mathematical thinking and why is it important?* 2006. www.cried.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2007/paper_pdf/Kaye%20Stacey.pdf.
- Tall D. *Introducing Three Worlds of Mathematics*. 2004. citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.196.1671&rep=rep1&type=pdf.
- Tall D. *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*. 2008. www.merga.net.au/documents/MERJ_20_2_Tall.pdf.
- Vidurinio ugdymo bendrosios programos: Matematika*. 2011. portalas.emokykla.lt/.

ŠVIETIMO PROBLEMOS ANALIZĖ – Švietimo ir mokslo ministerijos leidinių serija, skirta politikams, savivaldybių švietimo padalinių specialistams ir plačiajai visuomenei, nušviečianti kylančias ir sprendžiamas švietimo problemas. Serijoje „Švietimo problemos analizė“ pateikiama glausta, konkreti ir aktuali švietimo sistemos funkcionavimo problemų analizė. Leidiniai skelbiami internete adresu http://www.smm.lt/svietimo_bukle/analizes.htmweb/lt/teisine-informacija/tyrimai-analizes/leidiniai-svietimo-problemos-analize ir portale Emokykla.

Pasiūlymus, pastabas ar komentarus prašome siųsti Švietimo ir mokslo ministerijos Strateginio planavimo ir analizės skyriaus vedėjui Ričardui Ališauskui (el. p. Ricardas.Alisauskas@smm.lt).

Autorius, norinčius publikuoti savo parengtas analizes serijoje „Švietimo problemos analizė“, prašome kreiptis į Švietimo ir mokslo ministerijos Strateginių programų biuro vyriausiąją specialistę Jūratę Vosilytę-Abromaitienę (el. p. Jurate.Vosilyte-Abromaitiene@smm.lt, tel. (8 5) 219 1121).

Analizę parengė Donata Vaičiūnaitė, Nacionalinės mokyklų vertinimo agentūros Politikos analizės skyriaus metodininkė.

Konsultavo: Marytė Skakauskienė, Švietimo ir mokslo ministerijos Pagrindinio ir vidurinio ugdymo skyriaus vyriausioji specialistė.

LIETUVOS MOKINIŲ MATEMATINIS MĄSTYMAS (PAGAL TIMSS TYRIMUS)

Redaktorė *Stefanija Skebienė*
Maketuotojas *Gintautas Vaitonis*

2013-12-12. Tir. 1 800 egz.

Išleido Švietimo ir mokslo ministerijos
Švietimo aprūpinimo centras, Geležinio Vilko g. 12, LT-01112 Vilnius
Spausdino UAB „Lodvila“, Sėlių g. 3A, LT-08125 Vilnius

ISSN 1822-4156